УДК 519.86

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Н.Г. Павлова[1]

1 *natasharussia@mail.ru*; Российский университет дружбы народов

В работе исследуется вопрос существования вектора равновесных цен в модели конкурентного равновесия. В рассматриваемой модели функция спроса получена как решение задачи максимизации функции полезности при бюджетных ограничениях, а функция предложения как решение задачи максимизации прибыли с учетом транзакционных потерь на технологическом множестве. В работе приводятся достаточные условия существования вектора равновесных цен, которые получены как следствие теорем о существовании точек совпадения липшицевого и накрывающего отображений.

Ключевые слова: экономическое равновесие, транзакционные издержки, точки совпадения.

Результаты теории накрывающих отображений, в частности, теоремы о существовании точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений можно применить для получения достаточных условий существования положения равновесия в моделях "спрос-предложение". В настоящей работе исследован вопрос существования вектора равновесных цен в модели конкурентного равновесия, в которой учитываются транзакционные издержки, связанные с продажей продукции. В отличие от работы [1], в рассматриваемой модели доли транзакционных издержек для различных типов продукции, вообще говоря, различны. Формализуем поставленную задачу. Рассмотрим метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r будем обозначать через $B_X(x,r)$, а замкнутый шар в пространстве Y с центром в точке y радиуса r — через $B_Y(y,r)$.

Определение 1 (см. [2]). *Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $D: X \to Y$ называется α-накрывающим, если*

$$D(B_X(x,r)) \supseteq B_Y(D(x),\alpha r) \ \ \forall r \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Теорема 1 (см. [2]). *Пусть пространство X полно, а D, $S: X \to Y$ – произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является α-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что*

$$D(\xi) = S(\xi), \tag{1}$$

$$\rho_X(x_0,\xi) \leq \frac{\rho_Y(D(x_0),S(x_0))}{\alpha-\beta}.$$

Решение ξ уравнения (1) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений D и S. Используя теорему 1, можем исследовать вопрос о существовании равновесия в моделях “спрос-предложение”, в частности, возможно получить достаточные условия существования вектора равновесных цен в модели экономического равновесия с транзакционными издержками.

Рассмотрим модели поведения производителей и потребителей. Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, причем i-ый товар для потребителя имеет цену $p_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Предположим также, что цены $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$, по которым производитель реализует товары, меньше цен $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, которые платит за них потребитель, причем $\tilde{p} = Ap$, где $A = \left(a_{ij}\right)$, $\alpha_{ij} \in (0;1)$ $\forall i, j = \overline{1,n}$.

Производственные возможности производителя описываются технологическим множеством $T \subset \mathbb{R}_+^{2n}$, $T = \left\{y = (y_+; y_-) | \varphi(y_+; y_-) \le 0, y_+, y_- \in \mathbb{R}_+^n\right\}$, где $\varphi : \mathbb{R}_+^{2n} \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая и сильно выпуклая функция, $y_- = (y_{-1}, y_{-2}, \ldots, y_{-n})$ — вектор затрат, а $y_+ = (y_{+1}, y_{+2}, \ldots, y_{+n})$ — соответствующий ему вектор выпусков ($y_{+i} \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,n}$, — валовый выпуск i-ой продукции, $y_{-i} \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,n}$, — объем i-ой продукции, используемой при производстве 1-ой продукции в объеме y_{+1}, 2-ой продукции в объеме y_{+2}, ..., n-ой продукции в объеме y_{+n}).

В производственном процессе используются все n видов ресурсов. Из всех возможных производственных процессов производитель выбирает тот, при котором прибыль максимальна. Таким образом, выбор производителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции прибыли:

$$\begin{cases} \langle (Ap; -p), (y_+; y_-) \rangle \to \max, \\ \varphi(y_+; y_-) \le 0, \\ (y_+; y_-) > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $y^* = (y_+^*, y_-^*)$ — решение задачи (2). Тогда предложение производителя i-го товара $S_i(p) = y_+^* - y_-^*$, $i = \overline{1,n}$.

Потребительские предпочтения потребителя, обладающего бюджетом $I(p)$, задаются функцией полезности $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, являющейся дважды непрерывно дифференцируемой, строго вогнутой и не имеющей максимумов. Функция $I : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ является дифференцируемой положительно однородной первой степени, кроме того, существует число $C > 0$, такое что $I(p) \ge C||p||$ для любых $p \in \mathbb{R}_+^n$. Предположим также, что потребитель приобретает все n видов товаров, причем, приобретая набор товаров $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$, потребитель приобретает y_1 единиц 1-го товара, y_2 единиц 2-го товара, ..., y_n единиц n-го товара

Выбор потребителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции полезности:

$$u(y) \to \max, \ \langle p, y \rangle \le I(p), \ \ y > 0.$$

Спрос потребителя задается отображением

$$D : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n, \ D(p) = \operatorname{Argmax}\left\{u(y) | y \in \mathbb{R}_+^n, \langle p, y \rangle \le I(p)\right\}.$$

Рассмотрим модель экономического равновесия, описываемую набором данных $\sigma = (A, \varphi, u, I, c_1, c_2)$, где $A = (\alpha_{ij})$, $\alpha_{ij} \in (0,1)$ $\forall i, j = \overline{1,n}$ — заданные числа, $\varphi : \mathbb{R}_+^{2n} \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая, сильно выпуклая функция, $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая, строго вогнутая функция, $I : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая положительно однородная первой степени функция, $c_1 = (c_{11}, ..., c_{n1})$, $c_2 = (c_{12}, ..., c_{n2}) \in \mathbb{R}_+^n$ — заданные векторы, причем $c_{i1} < c_{i2}$, $i = \overline{1,n}$.

Набор (α,φ,u,I) однозначно определяет функции спроса $D:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}^n_+$, $D(\cdot)=(D_1(\cdot),\dots,D_n(\cdot))$ и предложения $S:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}^n_+$, $S(\cdot)=(S_1(\cdot),\dots,S_n(\cdot))$. Числа α_{ij} $\forall i,j=\overline{1,n}$ — числа, характеризующие размеры транзакционных издержек производителей. Компоненты векторов c_1, c_2 определяют естественные ограничения на цены товаров, т.е. предполагается, что $c_{i1}\le p_i\le c_{i2}$, $i=\overline{1,n}$. Множество наборов $\sigma=(\alpha,\varphi,u,I,c_1,c_2)$, для которых выполнены неравенства $c_{i2}>c_{i1}$, $i=\overline{1,n}$, обозначим через Σ.

Определение 2. *Вектор $p\in\mathbb{R}^n_+$ называется вектором равновесных цен в модели σ, если $S(p)=D(p)$.*

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим нормы по формулам

$$\|x\|_1=2\max_{i=\overline{1,n}}\frac{|x_i|}{c_{i2}-c_{i1}},\quad \|x\|_2=\max_{i=\overline{1,n}}|x_i|\quad \forall\, x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим метрические пространства (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y), где $X=\mathbb{R}^n_+$, $Y=\mathbb{R}^n_+$, метрика ρ_X определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_Y — нормой $\|\cdot\|_2$.

Положим $\tilde c=\frac{c_1+c_2}{2}$, $M=B_X(\tilde c,1)$.

Введем обозначения

$$\tilde\alpha(\sigma)=2\left(||\bar\lambda||_C\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i2}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1}\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\min_{p\in M}\sum_{i=1}^{n}|I'_{p_i}(p)-y_i(p)|u_2-$$
$$-(n+1)||u_1||_C||\bar\lambda||_C\left(\max_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i1}}{c_{i2}-c_{i1}}\right)^{-1},$$

$$\tilde\beta(\sigma)=\frac{n+1}{2}\min_{i=\overline{1,n}}\frac{c_{i2}-c_{i1}}{c_{i1}}||\varphi_1||_C||\lambda||_C,\quad \tilde\gamma(\sigma)=\max_{i=\overline{1,n}}|\bar y_i-\bar y_{+i}+\bar y_{-i}|,$$

где

$$\varphi_1(y_+;y_-)=||\varphi'(y_+;y_-)||,\quad u_1(y)=||u'(y)||,\quad u_2(y)=||u''(y)||,$$

$\lambda(y_+;y_-)=\max\limits_{i=\overline{1,2n}}\left(\lambda_i(y_+;y_-)\right)^{-1}$, $\lambda_i(y_+;y_-)$, $i=\overline{1,2n}$, — собственные значения матрицы $\varphi''(y_+;y_-)$, $\bar\lambda(y)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\left|\bar\lambda_i(y)\right|^{-1}$, $\bar\lambda_i(y)$, $i=\overline{1,n}$, — собственные значения матрицы $u''(y)$,

$\forall\, p\in M$ $y=y(p)$ — решение задачи

$$\begin{cases} u(y)\to\max,\\ \langle p,y\rangle\le I(p),\\ y\ge 0,\end{cases}$$

$\bar y$ — решение задачи

$$\begin{cases} u(y)\to\max,\\ \langle c_1+c_2,y\rangle\le I(c_1+c_2),\\ y\ge 0,\end{cases}$$

$(\bar y_+,\bar y_-)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \langle (A(c_1+c_2);-c_1-c_2),(y_+;y_-)\rangle\to\max,\\ \varphi(y_+;y_-)\le 0,\\ (y_+;y_-)\ge 0.\end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть модель $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условиям:*
1) $\tilde{\alpha}(\sigma) > \tilde{\beta}(\sigma)$;
2) $\tilde{\gamma}(\sigma) < \tilde{\alpha}(\sigma) - \tilde{\beta}(\sigma)$.
Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен $p = (p_1, ..., p_n)$ такой, что $c_{i1} < p_i < c_{i2}$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство основано на применении теоремы 1 и лемм 1-3 из [1] к отображениям спроса и предложения в исследуемой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00849).

Литература

1. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А. *Равновесные цены в одной модели экономического равновесия* // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28. – № 3. – С. 3–22.

2. Арутюнов А.В. *Точки совпадения двух отображений* // Функц. анализ и его прил. – 2014. – Т. 48. – № 1. – С. 89–93.

APPLICATION OF THE COVERING MAPPINGS THEORY TO STUDY OF ECONOMIC MODELS

N.G. Pavlova

We study the existence of equilibrium price vector in a concurrent equilibrium model. In this model, the demand function is obtained as the solution of the problem of maximizing the utility function under budget constraints, and the supply function is obtained as the solution of the problem of profit maximization given transaction losses on the technology set. We establish sufficient conditions for the existence of equilibrium price vector. These conditions are consequences of general existence theorems for coincidence points of a Lipschitz and covering mappings.

Keywords: economic equilibrium, transaction costs, coincidence points.

УДК 517.956

ТЕОРИЯ НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Р. Пиров[1]

1 *pirov _60@mail.ru*; Таджикский государственный педагогический Университет имени С. Айни

Рассматриваются квазилинейные и нелинейные системы дифференциальных уравнении в частных производных первого и второго порядков с одной и двумя неизвестными функциями. Получены явные условии совместности, обеспечивающее однозначную разрешимости задач с начальными данными.

Ключевые слова: переопределенные системы, условия совместности, многообразия решений, операции перекрестного дифференцирования.

1. В последние десятилетия достаточно широко изучались регулярные системы вида

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_j} = f^{kj}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n; U_1, U_2, U_3, ..., U_m), k = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \quad (1)$$